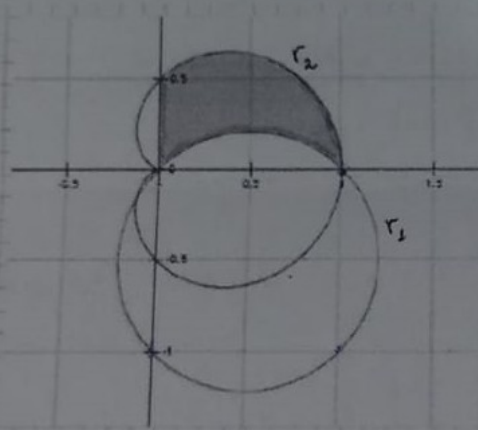
Práctica 4 Ciclo 22-1

Problema 1:

PREGUNTA 1 **(5 puntos)**



Calcule el área de la región sombreada $\rho_1 = \cos(\theta) - sen(\theta)$, $\rho_2 = 0.5(1 + \cos(\theta))$ y la recta $\theta = \pi/2$

1.- $P_1: r = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$

$P_2: r = 0.5(1 - \cos\theta)$

Dado que p es una circunferencia, se puede hallar el area integrable sombreada de p_2 y luego restarle el segmento circular.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(0.5(1+\cos\theta)\right)^2 d\theta$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

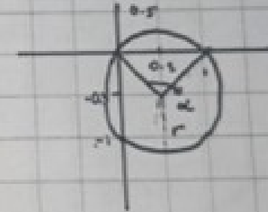
$$\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}2\theta = \frac{1}{8}\Big|_0^{\pi/2} \frac{3\theta}{2} + 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{3\pi}{4} + 2\right] = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$$

Area del sector circular:

$r = \sqrt{1/2}$ $\alpha = \pi/2$

$$A_{sc} = \frac{r^2\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{8}$$



Area del segmento circular

$$A = A_{sc} - A_{\Delta}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Area sombreada:

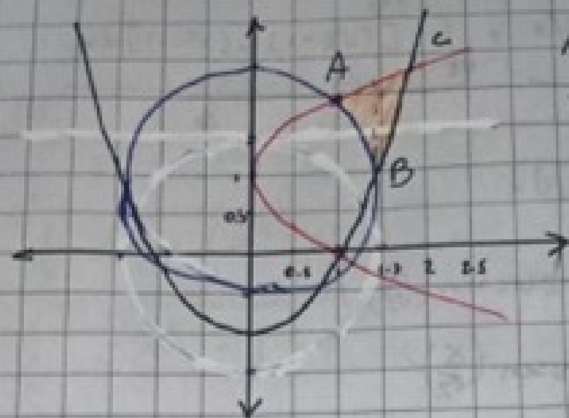
$$\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{32}$$

Problema 2a:

PREGUNTA 2 (5 puntos)

a) Calcule el área limitada por las curvas $x = (y-1)^2, y = x^2 - 1, x^2 + (y-1)^2 = 2$ para $x \geq 0$.

2. a - Se trata de relaciones no funcionales:



A: $x = (y-1)^2$

$y = \sqrt{x} + 1$, $y = -\sqrt{x} + 1$

B: $y = x^2 - 1$

C: $x^2 + (y-1)^2 = 2$

$y = \sqrt{2-x^2} + 1$, $y = -\sqrt{2-x^2} + 1$

Se busca determinar el area de la región coloreada, integrado de forma definida para x entre los puntos A B y C

$$A = \int_{A_x}^{B_x} [(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{2-x^2} + 1)]dx + \int_{B_x}^{C_x} [(\sqrt{x} + 1) - (x^2 + 1)]$$

Calculando A, B y C

$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2-x^2} + 1$

$\sqrt{x} = \sqrt{2-x^2}$

$x = 2 - x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$, $A_x = 1$

$\sqrt{2-x^2} + 1 = x^2 - 1$

$\sqrt{2-x^2} = x^2 - 2$

$2 - x^2 = x^4 - 4x^2 + 4$

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ $\quad x \geq 0$

$(x^2 - \ )(x^2 - 1) = 0$

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-1)(x+1) = 0$

$(x-\sqrt{2})(x-1) = 0$ $\quad A_x \neq B_x$

$x = \sqrt{2}$, $B_x = \sqrt{2}$

$\sqrt{x} + 1 = x^2 - 1$

$\sqrt{x} = x^2 - 2$

$x = x^4 - 4x^2 + 4$

$x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$

$(x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 4) = 0$ $\quad C_x \neq A_x$

$x^3 + x^2 - 3x - 4 = 0$

Todo polinomio de grado impar siempre tiene como mínimo, una solución real.

No se puede factorizar en los enteros, iterando por Newton-Raphson

$f(1) = -5$ $\quad f(1.5) = -2.875$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$ $\quad X_3 = 1.831$

$f(2) = 2$ $\quad X_1 = 2$

$f(3) = 23$ $\quad C_x \in (1.5, 2)$ $\quad X_2 = X_1 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{13} = 1.8461...$

Problema 2a:

Integrando:

$$A = \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}} [(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{2-x^2})]\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{1.831} [(\sqrt{x}-1) - (x^2-1)]\,dx}_{②}$$

$$①: \int_1^{\sqrt{2}} [(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{2-x^2})]\,dx$$

$$\Big|_1^{\sqrt{2}} \frac{2x^{3/2}}{3} + x - \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2-x^2} + 2\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\Big|_1^{\sqrt{2}} \frac{2x^{3/2}}{3} + x - \frac{x\sqrt{2-x^2}}{2} - \text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\cdot(2)^{3/4} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{2^{7/4}}{3} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{7}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt[4]{2^7}}{3} + \sqrt{2} - \frac{7}{6} - \frac{\pi}{4}$$

$$② \int_{\sqrt{2}}^{1.831} [(\sqrt{x}+1) - (x^2-1)]\,dx$$

$$\Big|_{\sqrt{2}}^{1.831} \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x - \frac{x^3}{3} + x = \Big|_{\sqrt{2}}^{1.831} \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2x - \frac{x^3}{3}$$

$$\left(3.662 - 2.046 + \frac{2}{3}\sqrt{(1.831)^3}\right) - \left(\frac{2^{7/4}}{3} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1.616 + \frac{2}{3}\sqrt{(1.831)^3} - \frac{2^{7/4}}{3} - \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$A = ① + ②$$

$$\frac{\sqrt[4]{2^7}}{3} + \sqrt{2} - \frac{7}{6} - \frac{\pi}{4} + 1.616 + \frac{2}{3}\sqrt{(1.831)^3} - \frac{\sqrt[4]{2^7}}{3} - \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$A = 1.616 + \frac{\pi}{4} - \frac{7}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{(1.831)^3}$$

Problema 2b:

b) Calcule la longitud de la curva C, dada por $C\colon\ y = (4e^x + e^{-x})/4$, con $0 \leq x \leq \ln 2$.

b. $y = \dfrac{4e^x + e^{-x}}{4} = e^x + \dfrac{e^{-x}}{4}$

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + ((e^x + e^{-x}/4)')^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (e^x - e^{-x}/4)^2}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + e^{2x} - \frac{1}{2} + e^{-2x}/16}$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} - \frac{1}{2} + e^{-2x}/16}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{(e^x - e^{-x}/4)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x}/4)\, dx = \Big|_0^{\ln 2}\ e^x + e^{-x}/4$$

$$= (e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}/4) - (e^0 + \frac{e^{-0}}{4})$$

$$= 2 + \frac{1}{8} - \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 2 + \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

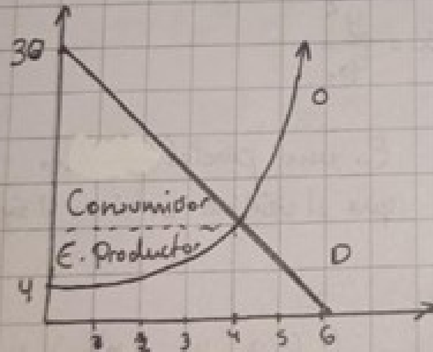
Problema 3:

En el mercado mayorista “El Centro”, la demanda de ciertas prendas está dada por la ecuación D: $p = 30 - 5q$, mientras que la ecuación de la oferta es S: $p = 4 + 0.5q + 0.25q^2$, siendo q la cantidad de prendas y p precio unitario

Determine lo siguiente:

a) El punto de equilibrio
b) El excedente del productor
c) El excedente del consumidor

3: D: $p = 30 - 5q$ S: $p = 4 + 0.5q + 0.25q^2$



Hallando el equilibrio de mercado:

$$4 + 0.5q + 0.25q^2 = 30 - 5q$$
$$0.25q^2 + 5.5q - 26 = 0$$
$$q^2 + 22q - 104 = 0$$
$$(q+26)(q-4) = 0, \quad q \geq 0$$
$$q = 4$$

Reemplazando:

$$p = 30 - 5q$$
$$p = 30 - 20 = 10$$

El equilibrio del mercado se da en

$$p = 10, \quad q = 4$$

b: Excedente del productor:

$$-\int_0^{q^*} (S - p^*)\, dq$$
$$-\int_0^4 (4 + 0.5q + 0.25q^2 - 10)\, dq = -\int_0^4 (0.25q^2 + 0.5q - 6)\, dq$$
$$= -\Big|_0^4 \left(\frac{q^3}{12} + \frac{q^2}{4} - 6q \right) = -\left(\frac{64}{12} + \frac{16}{4} - 24 \right) = -\left(-\frac{44}{3}\right) = \frac{44}{3}$$

c: Excedente del consumidor:

$$\int_0^{q^*} (D - p^*)\, dq$$
$$\int_0^4 (30 - 5q - 10)\, dq$$
$$\int_0^4 (20 - 5q)\, dq = \Big|_0^4 20q - \frac{5}{2}q^2$$
$$= 80 - \frac{5}{2} \cdot 16 = 40$$

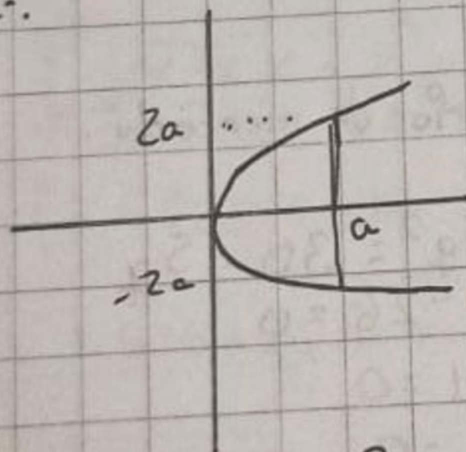
Problema 4a:

PREGUNTA 4

a)

Calcular el volumen del sólido engendrado al rotar alrededor de la recta $x = a$ la región acotada por esta recta y la parábola $y^2 = 4ax$, $(a > 0)$.

4-. a-.



$y^2 = 4ax$ $\quad x = \frac{y^2}{4a}$

$y = \sqrt{4ax}$

$\int_S A(y)\,dy$

Es una función por dado que el vértice está en el eje y

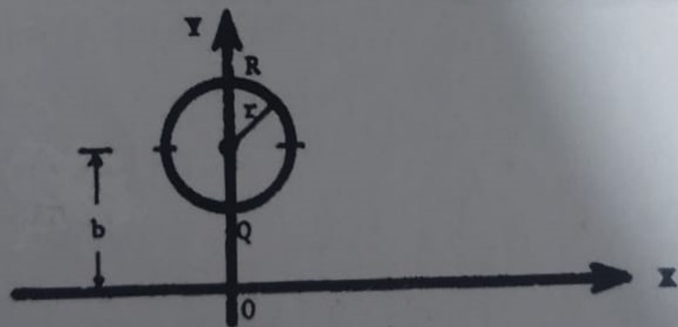
$$\pi\int_{-2a}^{2a}\left(a - \frac{y^2}{4a}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{2a}\left(a - \frac{y^2}{4a}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{2a}\left(a^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16a^2}\right) dy$$

$$2\pi\left.\left(a^2 y - \frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{80a^2}\right)\right|_0^{2a} = 2\pi\left(2a^3 - \frac{4a^3}{3} - \frac{2a^3}{5}\right) = \frac{8\pi a^3}{15}$$

Problema 4b:

b)

Encontrar el volumen del anillo sólido (o **toro**) obtenido cuando se rota un círculo de radio r alrededor de un eje exterior en su plano y a b unidades de su centro.



30 - 20 - 6

4

b.-



Función par:

Por formula de volumen del toro:

$V = 2\pi^2 R \cdot r^2$

$V = 2\pi^2 b \cdot r^2$

Por integrales:

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + b$; Area azul

$g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} + b$; Area negra

$V = V_{AZUL} - V_{NEGRO} = V(f(x)) - V(g(x))$

$V_{AZUL} = \int_{-r}^{r} \pi (R(x))^2 dx = 2\pi \int_0^r (R(x))^2 dx$

$= 2\pi \int_0^r (\sqrt{r^2 - x^2} + b)^2 dx = 2\pi \int_0^r ((r^2 - x^2) + 2b\sqrt{r^2 - x^2} + b^2) dx$

$= 2\pi \cdot \Big|_0^r r^2 x - \frac{x^3}{3} + 2b\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \cdot \text{arcsen}(x/r)\right) + b^2 x$

$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + b\left(r^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + b^2 r\right)$

$= 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} + \frac{br^2\pi}{2} + b^2 r\right) = \frac{4\pi r^3}{3} + br^2\pi^2 + 2b^2 r$

$V_{NEGRO} = \int_{-r}^{r} \pi (R(x))^2 dx = 2\pi \int_0^r (R(x))^2 dx$

$= 2\pi \int_0^r (-\sqrt{r^2 - x^2} + b)^2 dx = 2\pi \int_0^r ((r^2 - x^2) - 2b\sqrt{r^2 - x^2} + b^2)$

$= 2\pi \Big|_0^r r^2 x - \frac{x^3}{3} - 2b\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \text{arcsen}(x/r)\right) + b^2 x$

$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - b\left(r^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + b^2 r\right)$

$= 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} - \frac{br^2\pi}{2} + b^2 r\right) = \frac{4\pi r^3}{3} - 2br^2\pi^2 + 2\pi b^2 r$

$V = V_{AZUL} - V_{NEGRO}$

$V = \left(\frac{4\pi r^3}{3} + br^2\pi^2 + 2b^2 r\right) - \left(\frac{4\pi r^3}{3} - 2br^2\pi^2 + 2\pi b^2 r\right) = 2\pi^2 b r^2$

Práctica 4 Ciclo 22-2

Problema 1:

Práctica 4 Ciclo 23-1

Problema 1:

1. Dada ls función $f(x) = e^{x^2}\cos(x)$.

   a) Halle el polinomio de MacLaurin de grado 2, $T_2(f(x),0)$ de f.

   b) Hallar la cota del error: $|f(x) - T_2(f(x),0)|$ para $x \in [-1;1]$.

   c) Determine una cota para el error cometido al usar el polinomio para aproximar

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

a) Solución

Sea $f(x) = e^{x^2}\cos x \rightarrow f(0) = 1$

- $f'(x) = (e^{x^2})'\cos x + e^{x^2}(\cos x)'$

  $= e^{x^2}2x\cos x + e^{x^2}(-\operatorname{sen} x)$

  $= e^{x^2}(2x\cos x - \operatorname{sen} x) \rightarrow f'(0) = 0$

- $f''(x) = (e^{x^2})'(2x\cos x - \operatorname{sen} x) + e^{x^2}(2x\cos x - \operatorname{sen} x)'$

  $= e^{x^2}2x(2x\cos x - \operatorname{sen} x) + e^{x^2}((2x\cos x)' - (\operatorname{sen} x)')$

  $= e^{x^2}2x(2x\cos x - \operatorname{sen} x) + e^{x^2}(2\cos x + 2x(-\operatorname{sen} x) - \cos x)$

  $= e^{x^2}(4x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x + \cos x - 2x\operatorname{sen} x)$

  $= e^{x^2}(4x^2\cos x - 4x\operatorname{sen} x + \cos x)$

  $f''(0) = 1$

* Nos piden el p. MacLaurin de grado 2, entonces

$T_2[f(x),0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$

$= 1 + 0x + \frac{1}{2}x^2$

$\therefore T_2[f(x),0] = 1 + \frac{x^2}{2}$

b) Solución

Sea la cota del error además $|f^{(3)}(\varepsilon(x))|$

$|f(x) - T_2(f(x),0)| \le \frac{\max|f^{(3)}(\varepsilon)|}{3!}|x|^3$

* Hallando la 3era derivada

- $f^{(3)}(x) = e^{x^2}2x(4x^2\cos x - 4x\operatorname{sen} x + \cos x) + e^{x^2}(4x^2\cos x - 4x\operatorname{sen} x + \cos x)'$

  $e^{x^2}(4x\cos x - 4x^2\operatorname{sen} x - 5\operatorname{sen} x)$

  $= e^{x^2}(8x^3\cos x - 8x^2\operatorname{sen} x + 2x\cos x + 4x\cos x - 4x^2\operatorname{sen} x - 5\operatorname{sen} x)$

$(4x^2\cos x - 4x\operatorname{sen} x + \cos x)$

$4(2x\cos x + x^2(-\operatorname{sen} x)) - 4(\operatorname{sen} x + x\cos x) - \operatorname{sen} x$

$8x\cos x - 4x^2\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen} x - 4x\cos x - \operatorname{sen} x$

$4x\cos x - 4x^2\operatorname{sen} x - 5\operatorname{sen} x$

$f^{(3)}(x) = e^{x^2}(8x^3\cos x - 12x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 5\operatorname{sen} x)$

FUNCIÓN IMPAR $|f^{(3)}(x)|$ FUNCIÓN CRECIENTE $\forall x \in [-1,1]$

Notamos que el $\varepsilon(x) = 1$

Así

$|f^{(3)}(\varepsilon)| = |e^{(1)^2}(8(1)^3\cos 1 - 12(1)^2\operatorname{sen} 1 + 6(1)\cos 1 - 5\operatorname{sen} 1)|$.

$\therefore$ La cota del error sería

$|f(x) - T_2(f(x),0)| \le \frac{e|8\cos 1 - 12\operatorname{sen} 1 + 6\cos 1 - 5\operatorname{sen} 1|}{6} \cdot |x|^3$ ← Cota del error

c) Solución (Una cota para el error cometido alrededor $x=0$)

$I_{error} = \int_{-1}^{1} \frac{e|8\cos 1 - 12\operatorname{sen} 1 + 6\cos 1 - 5\operatorname{sen} 1|}{6}|x|^3$

$I_{error\ total} = \frac{e|8\cos 1 - 12\operatorname{sen} 1 + 6\cos 1 - 5\operatorname{sen} 1|}{6}\underbrace{\int_{-1}^{1}|x|^3 dx}_{1/2}$

$-\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx$

$\Rightarrow \frac{e}{12}(|8\cos 1 - 12\operatorname{sen} 1 + 6\cos 1 - 5\operatorname{sen} 1|)$

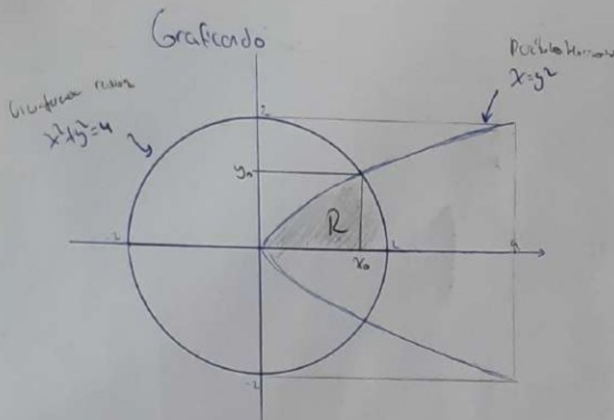
Problema 3:

2. Sea R la región en el primer cuadrante, limitada por el eje X y las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x = y^2$.

a) Calcule el perímetro de la región R.

b) Halle el área de la superficie del sólido que se genera al girar la región R alrededor de la recta $y = 5$.

Graficando



• Punto de intersección

de ambas curvas, igualamos

$x^2+y^2=4 \quad \wedge \quad x=y^2$

$x^2+x-4=0$

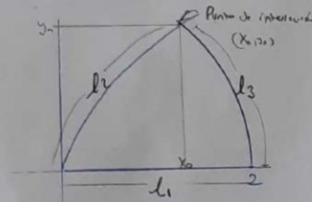
Raíces: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(1)(-4)}}{2(1)}$

$x_0 > 0$

$x_0 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$y_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$

a) Nos piden el perímetro de la región R

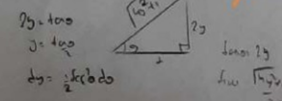


Perímetro (R) = $l_1 + l_2 + l_3$

⇒ • $l_1 = 2$

• $l_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}} \sqrt{1+[(y^2)']^2}\, dy$

$= \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}} \sqrt{1+(2y)^2}\, dy$



$2y = \tan\theta$

$y = \frac{\tan\theta}{2}$

$dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

Por integral indefinida

$I = \int \sqrt{1+\tan^2\theta}\ \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int \underbrace{\sec\theta}_{u}\,\underbrace{\sec^2\theta\, d\theta}_{dv}$

$uv - \int v\,du$

$I = \frac{1}{2}\left\{\sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta\right\}$

$-\int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec\theta$

$I = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - 2I + \ln|\sec\theta + \tan\theta|$

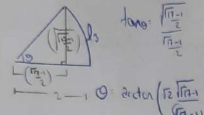
$I = \frac{1}{4}\left\{\sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta)\right\} + C$ "En función de θ"

$= \frac{1}{4}\left\{\sqrt{4y^2+1}\cdot 2y + \ln\left|\sqrt{4y^2+1} + 2y\right|\right\} + C$ "En función de y"

$l_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}} \sqrt{1+4y^2}\, dy = \frac{1}{4}\left[\sqrt{4y^2+1}\cdot 2y + \ln\left|\sqrt{4y^2+1} + 2y\right|\right]_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}$

$$l_2 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{4\left(\sqrt{\tfrac{\sqrt{17}-1}{2}}\right)^2+1}\cdot 2\sqrt{\tfrac{\sqrt{17}-1}{2}} + \ln\left|\sqrt{4\left(\sqrt{\tfrac{\sqrt{17}-1}{2}}\right)^2+1} + \sqrt{\tfrac{\sqrt{17}-1}{2}}\right|\right]_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}$$

• l_3 es un arco de sector circular



$\tan\theta = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$

$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17}-1}}{(\sqrt{17}-1)}\right)$

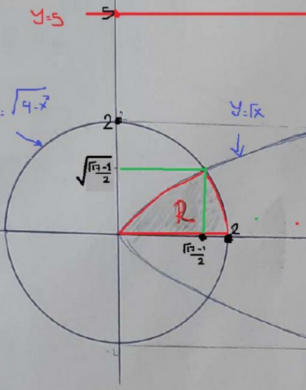
$l_3 = \theta \cdot r = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17}-1}}{(\sqrt{17}-1)}\right)\cdot 2$

∴ Finalmente el perímetro pedido es:

Perímetro: $l_1 + l_2 + l_3$

$\Rightarrow 2 + (\alpha) + 2\arctan\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{17}-1}}{(\sqrt{17}-1)}\right)\right)$

$(\alpha) = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{4\sqrt{17}-3}\cdot\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17}-1} + \ln\left|\sqrt{4\sqrt{17}-3}\ \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17}-1}\right|\right\}$



$A_{ST} = \int_0^{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} 2\pi(5-\sqrt{x})\sqrt{1+\left((5-\sqrt{x})'\right)^2}\, dx$

$+ \int_{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}^{2} 2\pi\left(5-\sqrt{4-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\left(5-\sqrt{4-x^2}\right)'\right)^2}\, dx$

Problema 3:

3. Calcular la longitud de la curva $\alpha(t)$, siendo la curva:

$$\alpha(t): \begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3\operatorname{sen}(t) \end{cases} \quad , \quad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

Sea la longitud de curva en coordenadas paramétricas (ℓ_p):

$$\ell_p = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{((3\cos t)')^2 + ((3\operatorname{sen} t)')^2}\, dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{9(-\operatorname{sen} t)^2 + 9(\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{9\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 3\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = 3\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = 3\,[t]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

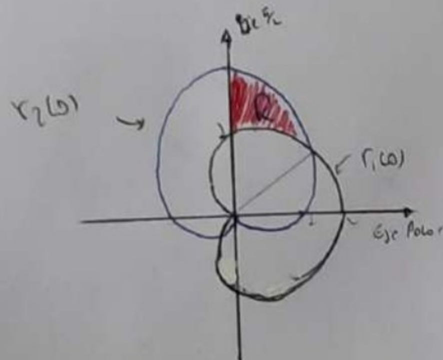
$$3\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3$$

∴ Finalmente

$$\ell_p = \frac{3\pi}{2}$$

Problema 4:

4. Calcule el área que se muestra en la figura, siendo $r_1(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ y $r_2(\theta) = 1 + \sin(\theta)$



θ	$r_1(\theta)$	$r_2(\theta)$
0	2	1
π/4	$1+\frac{\sqrt2}{2}$	$1+\frac{\sqrt2}{2}$
π/2	1	2

En $\theta = \frac{\pi}{4}$ $r_1(\theta)$ y $r_2(\theta)$ se intersectan

Así el área en coordenadas polares resulta ser:

$$A_R = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(r_2(\theta)^2 - r_1(\theta)^2\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left((1+\sin\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1+\sin^2\theta + 2\sin\theta - (1+\cos^2\theta + 2\cos\theta)\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\underbrace{\sin^2\theta - \cos^2\theta}_{-\cos 2\theta} + 2(\sin\theta - \cos\theta)\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(2\sin\theta - 2\cos\theta - \cos 2\theta\right) d\theta$$

A LA VUELTA 2

$$A_R = \frac{1}{2}\left\{\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\sin\theta)\,d\theta - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\cos\theta)\,d\theta - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2\theta)\,d\theta\right\}$$

$$= -\int_{\pi/4}^{\pi/2} (-\sin\theta) - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2\theta\,d\theta$$

$$= -\left[\cos\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \left[\sin\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -\left\{0 - \frac{\sqrt2}{2}\right\} - \left\{1 - \frac{\sqrt2}{2}\right\} - \frac{1}{4}\left\{0 - 1\right\}$$

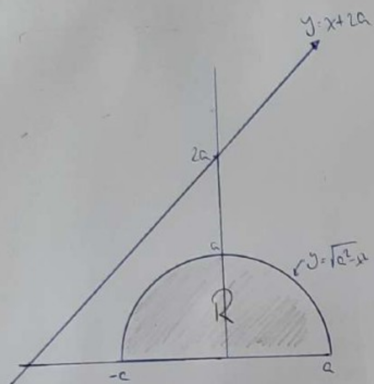
$$= \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2} + \frac{1}{4} \quad (-1)$$

∴ Finalmente el área de la región R es:

$$A_R = \sqrt2 - \frac{3}{4}$$

Problema 5:

5. Sea D la región limitada por la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$ y y el eje X. Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de D alrededor de la recta $y = x + 2a$.



Área de la región R

$$A_R = 2\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad x = a\sin\theta \;\; dx = a\cos\theta\,d\theta \qquad x=0 \to \theta=0,\; x=a \to \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\int_0^a a\sqrt{1-\sin^2\theta}\, a\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{2a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos 2\theta + 1)\,d\theta$$

$$= a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$A_R = \frac{\pi a^2}{2}$$

Encontrando el centroide $C(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A_R} = \frac{2\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A_R} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\int_0^a (\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

Ahora encontrando el volumen de revolución pedido, por T. Pappus.

$$V = 2\pi A_R \cdot d(C, \mathcal{L}) \qquad \mathcal{L}: x - y + 2a = 0$$

$$d(C,\mathcal{L}) = \frac{\left|\left(\frac{4a}{3\pi}\right) - \left(\frac{4a}{3\pi}\right) + 2a\right|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2} \quad (a>0)$$

$$V = 2\pi\,\frac{\pi a^2}{2}\,a\sqrt{2}$$

$$\therefore V_{final} = a^3\sqrt{2}\,\pi^2 \; u^3$$

Práctica 4 Ciclo 22-2

Problema 1:

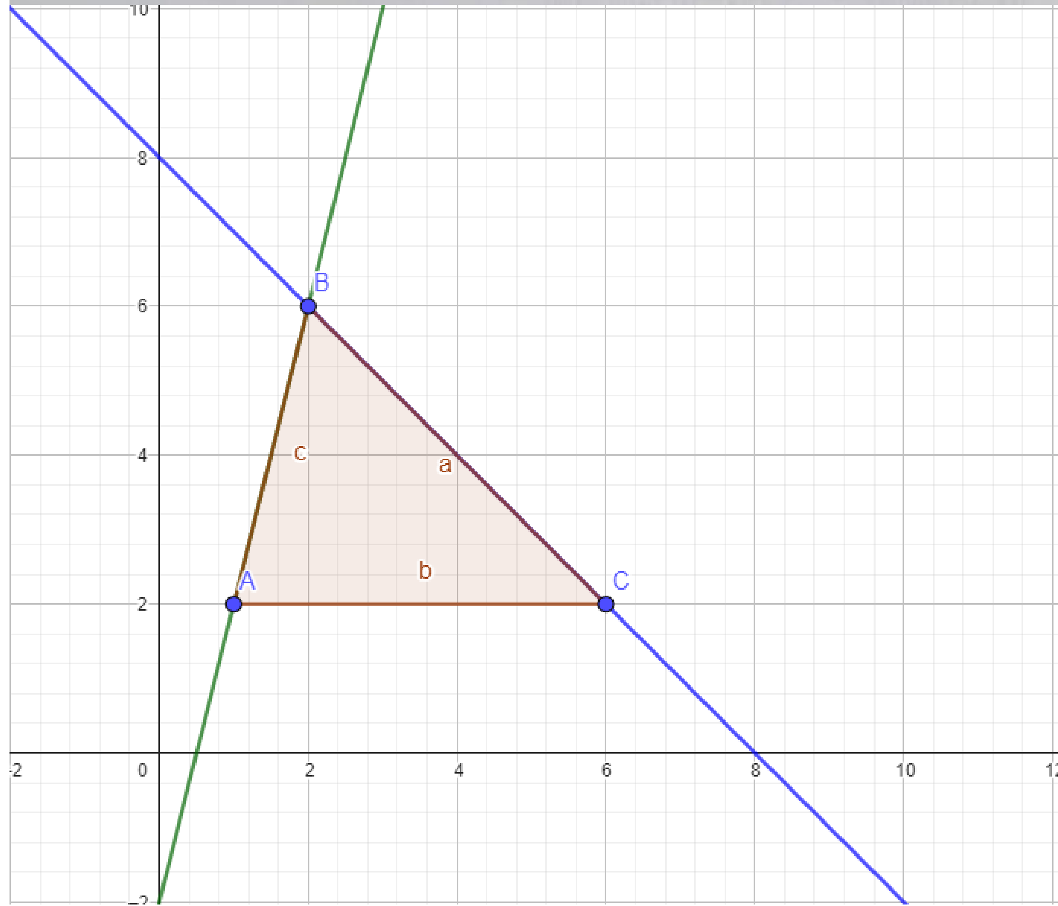
1. Encuentra el volumen del toro generado al hacer girar la región

$$D = \{(x, y) : (x-h)^2 + (y-k)^2 \leq c^2; h; k \leq c > 0\},$$

(a) alrededor del eje X, (b) alrededor del eje Y.

Problema 2:

2. Un triángulo con los vértices A(1;2), B(2;6) y C(6;2), es rotado sobre el eje X. Encuentre el volum
del sólido de revolución así obtenido. (5 punt



$\int_2^6 T^2(x)\,\pi\,dx$

$= \int_1^2 \pi(4x-2)^2dx + \int_2^6 \pi(-x+8)^2dx$

$\int_1^2 \pi(x^2-16x+4)dx + \int_2^6 \pi(x^2-16x+64)dx$

① ②

$\pi\left(\left[\frac{x^3}{3}-8x^2+4x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}-8x^2+64x\right]_1^2\right)$

$\pi\left(\frac{52}{3}\right) + \pi\left(\frac{127}{3}\right) = \pi\frac{179}{3}$

Problema 4:

4. Dada la ecuación en coordenadas polares $r = \frac{3}{\theta}$ (espiral). (5 puntos)

a) Halle, en coordenadas cartesianas, la asíntota de la curva generada por $r(\theta)$.

b) Calcule el área de la región limitada por la espiral, su asíntota y el eje normal (eje $\pi/2$).

la no es regular sino singular.

$r_1 = \frac{3}{\operatorname{sen}\theta}$

$r = 3/\operatorname{sen}\theta$

β

$r_2 = \frac{3}{\theta}$

$$A = \left[\lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^{\pi/2} \left(\frac{r_1^2}{2}\right) d\theta - \int_\alpha^{\pi/2} \left(\frac{r_2^2}{2}\right) d\theta \right]$$

$$A = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\int_\alpha^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 d\theta - \int_\alpha^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\theta}\right)^2 d\theta \right)$$

$$A = \frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \left[\int_\alpha^{\pi/2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) d\theta \right] = \frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \left[\int_\alpha^{\pi/2} \left(\csc^2\theta - \theta^{-2} \right) d\theta \right]$$

$$\frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \left[-\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\theta} \right]_\alpha^{\pi/2} = \frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \left[\left(0 + \frac{2}{\pi}\right) - \left(-\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \right]$$

$$\frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \left[\frac{2}{\pi} + \operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{\alpha} \right] = \frac{9}{\pi} + \frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\alpha}$$

L'Hopital

A senos y cosenos $$\frac{9}{\pi} + \frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{-\alpha \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\alpha \operatorname{sen}\alpha} = \frac{9}{\pi} + \frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\alpha \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \alpha \cos\alpha}$$

L Hopital $$\frac{9}{\pi} + \frac{9}{2} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\alpha + \alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha - \alpha \operatorname{sen}\alpha} = \frac{9}{\pi} + \frac{9}{2} \cdot 0 = \frac{9}{\pi}$$